

N° D'ORDRE

61

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
(Mathématiques)

PAR

劉 俊 賢

LIU Tsyun-hyen
(Lyeou Tsyun-hyen)

Licencié ès-Sciences Mathématiques

Elève de l'Institut Franco-Chinois de Lyon

1^e Thèse. — SUR L'ITÉRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

2^e Thèse — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : FAMILLES NORMALES
ET QUASI-NORMALES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

Soutenues le juillet 1930, devant la Commission d'examen

MM. J. SIRE
EYRAUD



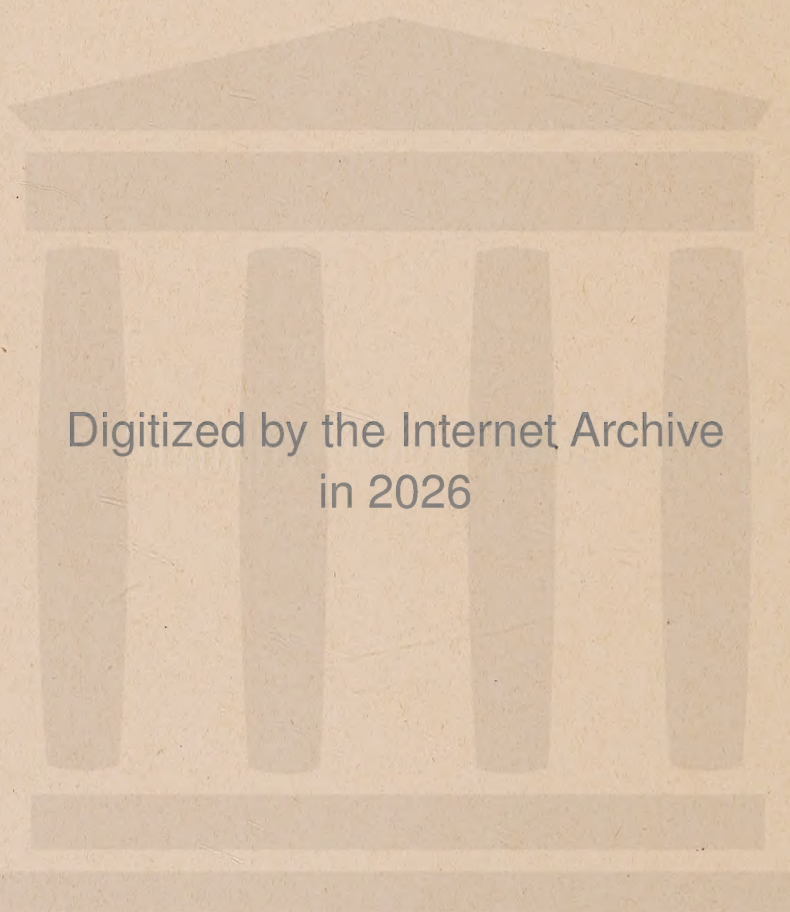
LYON

BOSC FRÈRES, M. & L. RIOU

42, QUAI GAILLETON

—
1930

SUR L'ITÉRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES



Digitized by the Internet Archive
in 2026

N° D'ORDRE

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LYON
(Mathématiques)

PAR

劉 俊 賢

LIYOU Tsyun-hyen

(Lyeou Tsyun-hyen)

Licencié ès-Sciences Mathématiques

Elève de l'Institut Franco-Chinois de Lyon

1^{re} Thèse. — SUR L'ITÉRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

2^e Thèse. — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ : FAMILLES NORMALES
ET QUASI-NORMALES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

Soutenues le juillet 1930, devant la Commission d'examen

MM. J. SIRE
EYRAUD



LYON

BOSC FRÈRES, M. & L. RIOU

42, QUAI GAILLETON

—
1930

UNIVERSITÉ DE LYON - FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen

M. GRIGNARD, O. ✱,  I., ✱, P. N., Membre de l'Institut, *Chimie générale*.

Assesseur

M. VANEY, ✱,  I., ✱.

Professeurs honoraires

MM VESSIOT, O. ✱,  I. ;
GÉRARD, O. ✱,  I., ✱ C. ; RIGOLLOT, ✱,  I. ;
VAUTIER,  I. ; LE VAVASSEUR, ✱,  I. ;
OFFRET, ✱,  I., ✱ ;
COUTURIER, ✱,  I., ✱.

Professeurs titulaires

MM. GRIGNARD, O. ✱,  I., ✱, P. N., Membre de l'Institut, *Chimie générale*.
KOEHLER, O. ✱,  I., ✱, Correspondant de l'Institut, *Zoologie*.
DULAC, ✱,  I., *Calcul différentiel et intégral*.
MASCART, ✱,  I., ✱, *Astronomie physique*.
SIRE,  I., ✱, *Mécanique rationnelle et appliquée*.
BEUNIER, O. ✱,  I., *Chimie industrielle*.
BEAUVERIE, ✱,  I., ✱, *Botanique*.
THOVERT, ✱,  I., ✱, *Physique*.
CARDOT,  I., *Physiologie générale et comparée*.
VANEY, ✱,  I., ✱, *Zoologie*.
LONGCHAMON, ✱,  I., *Minéralogie théorique et appliquée*.
LOCQUIN, ✱,  I., *Chimie générale*.
ROMAN,  I., *Géologie*.



Professeurs titulaires (sans chaire)

MM. DOUIN,  I., *Botanique*.
DÉJARDIN,  I., *Physique*.
LEMARCHANDS,  I., *Chimie industrielle*.
EYRAUD,  I., *Mathématiques*.

Maîtres de conférences et Chargés de cours complémentaires

MM. AUMÉRAS *Chimie physique*.
FROMAGEOT, *Chimie agricole*.
BONNET,  I., *Zoologie appliquée et Zootechnie*.
MAYET, ✱,  I., *Anthropologie*.
PELOSSE,  I., *Sériciculture*.
DONCIEUX,  I., P. C. N. Supérieur.
SEYEWETZ, ✱,  I., *Matières colorantes artificielles*.
M^{me} BACHRACH,  I., *Physiologie*.

Secrétaire

M^{me} NÉTIEU,  I.

A MONSIEUR J. SIRE

Hommage respectueux et reconnaissant.

PRÉFACE

L'étude d'itération de fonctions remonte à une époque assez lointaine. De 1883 à 1885, M. KÆNIGS en a obtenu de très beaux résultats qui montre le lien étroit entre l'itération et la résolution de l'équation fonctionnelle de SCHRÆDER. Mais, on est alors borné à une étude locale, c'est-à-dire dans le domaine d'un point double α de la substitution $[z|\varphi(z)]$ tel que $|\varphi'(\alpha)| < 1$, $\varphi(z)$ étant la fonction à itérer. Après la découverte de la famille normale de fonctions analytiques due à M. MONTEL, MM. JULIA et FATOU ont étudié l'itération de tout le plan. Il est évident que l'itération de tout le plan, y compris le point de l'infini, ne peut s'effectuer que par une fraction rationnelle. Lorsque la fonction à itérer est une fraction rationnelle, toutes les fonctions itératives sont des fractions rationnelles, de sorte qu'en un point quelconque du plan, ou bien la suite de fonctions itératives est normale, ou bien elle n'est pas normale. Donc, le problème d'itération de fractions rationnelles n'est qu'une étude des suites normales de fonctions méromorphes. Nous reprenons dans ce travail le sujet d'itération de fractions rationnelles qui a été largement développé par MM. JULIA et FATOU, en nous bornant seulement à l'application de la

théorie de la famille normale de fonctions. Faute de méthode nouvelle, nous n'avons pu toucher le cas encore non résolu des points indifférents ou tels que $\varphi(o)=o$, $\varphi'(o)=e^{i\theta}$, θ étant incommensurable avec 2π . Dans chapitre I, nous exposons de notre manière les résultats acquis par MM. JULIA et FATOU. Dans chapitre II, nous mettons en évidence le résultat que si les zéros de $\varphi'(z)$ sont tous antécédents de certains cycles, sans appartenir eux-mêmes à aucun cycle, l'ensemble F des points où la suite de fractions itératives n'est pas normale est identique au plan complet. Nous démontrons dans chapitre III qu'une fraction du second degré et à coefficients réels admettant un cycle attractif d'ordre 2, n'admet plus d'autres cycles attractifs ou indifférents d'ordre supérieur à 2. Enfin, nous avons donné un exemple pour lequel F est constitué par une infinité de courbes analytiques non fermées.

CHAPITRE PREMIER

Introduction et Etude générale

1. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle de z ; la fonction rationnelle $\varphi[\varphi(z)]$ qu'on en déduit en y remplaçant z par $\varphi(z)$ porte le nom d'itérée de $\varphi(z)$ et sera représentée par $\varphi_2(z)$. De même, on représentera par $\varphi_3(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$ les fonctions rationnelles $\varphi[\varphi_2(z)], \dots, \varphi[\varphi_{n-1}(z)], \dots$ qu'on obtient en remplaçant respectivement z par $\varphi_2(z), \dots, \varphi_{n-1}(z), \dots$ dans $\varphi(z)$. Les fonctions $\varphi_n(z)$ vérifient quels que soient les entiers p et q la relation

$$(1) \quad \varphi_{p+q}(z) = \varphi_p[\varphi_q(z)]$$

Etant donné z , le point z_n défini par $z_n = \varphi_n(z)$ est dit conséquent de rang n de z . Les points z_{-n} définis par l'équation

$$(2) \quad z = \varphi_n(z_{-n})$$

sont dits antécédents de rang n de z . Si k est le degré de la fraction rationnelle $\varphi(z)$, $\varphi_n(z)$ sera de degré k^n de sorte que z possède k^n antécédents de rang n . Observant que $n = (n-1) + 1$ et tenant compte de (1), (2) peut se mettre sous la forme $z = \varphi_{n-1}[\varphi_1(z_{-n})]$, ce qui montre que les antécédents de rang

n sont les antécédents de rang 1 des antécédents de rang $n - 1$. Nous désignerons par $\varphi_{-n}(z) = z_{-n}$ la fonction inverse de $\varphi_n(z_{-n}) = z$. $\varphi_{-n}(z)$ est une fonction multiforme à k^n branches. Comme $\varphi'_n(z) = \varphi'(z_{n-1}) \varphi'(z_{n-2}) \cdots \varphi'(z)$, $\varphi'_n(z)$ et $\varphi'_n(z)$ désignant les dérivés de $\varphi(z)$ et $\varphi_n(z)$, les zéros de $\varphi'_n(z)$ et tous leurs antécédents de rang inférieur à n sont les zéros de $\varphi'_n(z)$. Les points critiques de $\varphi_{-n}(z)$ sont les conséquents de rang n des zéros de $\varphi'_n(z)$ et sont par suite les conséquents de rang 1, 2, ..., n des zéros de $\varphi'_n(z)$.

2. Etant donné un point z , ou bien ses conséquents successifs $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ sont tous distincts, ou bien il en existe deux qui se coïncident. Dans le premier cas, la suite de conséquents de z comprend une infinité de points distincts. Dans le second cas, les conséquents distincts de z sont en nombre fini. En effet, soient m et r deux entiers les plus petits possible pour que l'on ait $z_{m+r} = z_m$; alors, $z_m, z_{m+1}, \dots, z_{m+r-1}$ sont tous distincts. Si i est un entier positif quelconque, nous avons en tenant compte de (1) $z_{m+r+i} = \varphi_i(z_{m+r}) = \varphi_i(z_m) = z_{m+i}$ et $z_{m+r+i} = \varphi_r(z_{m+i})$, ce qui montre que les conséquents à partir du rang m se confondent en r points $z_m, z_{m+1}, \dots, z_{m+r-1}$ et ceux-ci sont tous racines de l'équation

$$(3) \quad \varphi_r(z) - z = 0$$

L'ensemble des r points $z_m, z_{m+1}, \dots, z_{m+r-1}$ définit un cycle d'ordre r . On dit que les points $z_m, \dots, z_{m+r-1}$ sont attractifs, ou répulsifs, ou indifférents, suivant qu'on a en ces points $|\varphi'_r(z)| < 1$, ou $|\varphi'_r(z)| > 1$, ou $|\varphi'_r(z)| = 1$.

3. Soient $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(k-1)}$, les k antécédents de

rang 1 d'un point α_1 . On a remarqué dans n° 1 que les antécédents de rang n de α_1 sont les antécédents de rang $n-1$ des $\alpha, \alpha', \dots \alpha^{(k-1)}$. Donc, pour que α_1 ait un nombre fini d'antécédents distincts, il faut et il suffit que chacun des points $\alpha, \alpha', \dots \alpha^{(k-1)}$, ait un nombre fini d'antécédents distincts. Si, m, n, r étant des entiers positifs, on a $\alpha_{-n} \neq \alpha$ pour $n \leq r$, on doit avoir $\alpha_{-m} \neq \alpha_{-n}$ pour $m < r, n < r$, et $m \neq n$; par suite α admettra au moins r antécédents distincts $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots \alpha_{-r}$. Donc, pour que α ait un nombre fini d'antécédents distincts, il faut qu'il existe un antécédent de certain rang r, α_{-r} tel que

$$(4) \quad \alpha_{-r} = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha_{-n} \neq \alpha \quad \text{pour} \quad n < r.$$

D'où, en tenant compte de (1), (2), (4), on tire

$$\alpha = \varphi_r(\alpha_{-r}) = \varphi_r(\alpha) = \alpha_r$$

et $\alpha_1 = \varphi_r[\varphi(\alpha_{-r})] = \varphi_r[\varphi(\alpha)] = \varphi_r(\alpha_1)$.

Ainsi donc, pour que les antécédents distincts de α_1 soient en nombre fini, il faut qu'il existe k entiers positifs $r, r', \dots r^{(k-1)}$ tels que l'on ait

$$(5) \quad \alpha = \alpha_r, \alpha' = \alpha_{r'}, \dots \alpha^{(k-1)} = \alpha_{r^{(k-1)}};$$

$$(6) \quad \alpha_1 = \varphi_r(\alpha_1), \alpha_1 = \varphi_{r'}(\alpha_1), \dots \alpha_1 = \varphi_{r^{(k-1)}}(\alpha_1).$$

Or, d'après (4), on a $\varphi(\alpha_{-r}) = \alpha$, par suite $\alpha_{-(r-1)} = \alpha_1$. S'il existe un entier positif $n < r$ tel que $\alpha_1 = \varphi_n(\alpha_1)$, on en déduirait en remplaçant α_1 par $\alpha_{-(r-1)}$,

$$\alpha_{-(r-1)} = \varphi_n[\alpha_{-(r-1)}] = \alpha_{-(r-1-n)}$$

et par suite

$\alpha = \varphi_{r-1-n}[\alpha_{-(r-1-n)}] = \varphi_{r-1-n}[\alpha_{-(r-1)}] = \alpha_{-n}$ pour $n < r$, ce qui contredit (4). Donc, nous avons

$$\alpha_1 = \varphi_n(\alpha_1) \neq \alpha_1 \quad \text{pour} \quad n < r;$$

et pour la même raison,

$$\alpha_1 = \varphi_n(\alpha_1) \neq \alpha_1 \quad \text{pour} \quad n < r', \dots n < r^{(k-1)},$$

ce qui exige d'après (6) que $r = r' = \dots = r^{(k-1)}$.
Par conséquent, (5) s'écrit

$$\alpha = \alpha_r, \alpha' = \alpha'_r, \dots, \alpha^{(k-1)} = \alpha^{(k-1)}_r.$$

Comme $\alpha, \alpha', \dots, \alpha^{(k-1)}$ sont antécédents de rang 1 de α_1 , il en résulte que $\alpha_r = \alpha'_r = \dots = \alpha^{(k-1)}_r$ et par suite $\alpha = \alpha' = \dots = \alpha^{(k-1)}$. Ainsi, pour qu'un point α_1 ait un nombre fini d'antécédents, il faut que ses k antécédents de rang 1 se confondent en un seul point α , α sera alors un zéro multiple d'ordre $k-1$ de $\varphi'(z)$. Puisque $\varphi'(z)$ est de degré $2k-2$, il existe au plus deux points dont les antécédents sont en nombre fini. On a alors $r \leq 2$; car, si $r \geq 3$, il y aura au moins trois points distincts $\alpha, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}$ qui sont les zéros multiples d'ordre $k-1$ de $\varphi'(z)$ d'après le raisonnement précédent, ce qui est impossible. Donc, α_1 est ou bien un point double de la substitution $[z | \varphi(z)]$ ou bien forme avec α un cycle d'ordre 2. Ces points qui n'admettent qu'un ou deux antécédents distincts se nommeront points exceptionnels. S'il en existe un seul, en le prenant pour ∞ , $\varphi(z)$ sera un polynome. S'il en existe deux, en prenant l'un pour ∞ et l'autre pour 0, $\varphi(z)$ se réduira à la forme $\varphi(z) = z^{\pm k}$.

4. Nous définissons qu'un point α est point limite de conséquents ou d'antécédents d'un point β , lorsque quel que soit un cercle γ ayant pour centre α , il existe dans γ des conséquents ou des antécédents de β , d'un rang aussi élevé que l'on veut.

Cela étant, mettons en relief le théorème suivant :

Si quel que soit n , on a $|\varphi_n(z_0) - A| > \rho$, pour que la suite $\varphi_n(z)$ soit normale en z_0 , il faut et il suffit qu'il

existe deux nombres η et ε tels que l'on ait $|\varphi_n(z) - A| > \eta$ pour $|z - z_0| < \varepsilon$.

En effet, $\varphi_n(z)$ sont également continues dans les domaines où la suite $\varphi_n(z)$ est normale, de sorte qu'il existe deux nombres ε' et ε tels que l'on ait $|\varphi_n(z) - \varphi_n(z_0)| < \varepsilon'$ et $\rho - \varepsilon' > \eta$ pour $|z - z_0| < \varepsilon$. D'où, $|\varphi_n(z) - \varphi_n(z_0) + \varphi_n(z_0) - A| = |\varphi_n(z) - A| > \rho - \varepsilon'$ pour $|z - z_0| < \varepsilon$.⁽¹⁾ Donc, la condition énoncée est nécessaire. On sait qu'elle est aussi suffisante. Appliquons maintenant ce théorème pour établir les propositions suivantes :

I. Si un point α où la suite $\varphi_n(z)$ est normale, est point limite de conséquents d'un point β , l'ensemble $E(\beta)$ des points limites de conséquents de β coïncide avec l'ensemble $E(\alpha)$ des points limites de conséquents de α . Alors, $E(\alpha)$ est un ensemble parfait ou un cycle. En effet, si α est un point de $E(\beta)$, les conséquents α_n sont aussi des points de $E(\beta)$; car, dans le cas contraire, il existerait un cercle C ayant pour centre α_n dans lequel il n'y a aucun conséquent de β à partir d'un certain rang. Soient C_{-n} un des antécédents de rang n de C , qui contient α ; et γ un cercle de centre α tel que γ est contenu dans C_{-n} . Le conséquent de rang n de γ , γ_n sera donc contenu dans C . Or, les conséquents des conséquents d'un point β sont aussi des conséquents de β . Comme il existe dans γ des conséquents d'un rang aussi élevé que l'on veut, il en résulte que le rang des conséquents de β situés dans γ_n ne sera pas borné, ce qui contredit notre hypothèse. Donc, les conséquents de α sont aussi des points de $E(\beta)$; par suite, tout point de $E(\alpha)$ est un point de $E(\beta)$. Il reste à montrer que tout point appartenant à $E(\beta)$ appartient à $E(\alpha)$.

(1) On a fait le raisonnement sur la sphère.

Supposons qu'un point α' de $E(\beta)$ n'appartient pas à $E(\alpha)$. Il existe donc un cercle ayant pour centre α' et pour rayon ρ dans lequel il n'y a aucun conséquent de α à partir d'un certain rang N , c'est-à-dire qu'on a $|\varphi_n(\alpha) - \alpha'| > \rho$ pour $n > N$. Par l'hypothèse, la suite $\varphi_n(z)$ est normale en α . Par conséquent, nous avons d'après le théorème précédent.

$$(7) \quad |\varphi_n(z) - \alpha'| > \eta \text{ pour } |z - \alpha| < \varepsilon \text{ et } n > N.$$

Or, α et α' étant un point de $E(\beta)$, on peut trouver dans les cercles ayant pour centre α ou α' des conséquents de β d'un rang aussi élevé que l'on veut. Il existe donc deux entiers n et n' tels que l'on ait

$$n' - n > N, \quad |\beta_{n'} - \alpha'| = |\varphi_{n'-n}(\beta_n) - \alpha'| < \eta, \quad |\beta_n - \alpha| < \varepsilon,$$

ce qui contredit (7). Par conséquent, tout point de $E(\beta)$ est un point de $E(\alpha)$. Si α n'a qu'un nombre fini de conséquents distincts, d'après n° 2, $E(\alpha)$ est un cycle. Comme $E(\alpha) \equiv E(\beta)$, α fait partie du cycle. Si α a une infinité de conséquents distincts, ces conséquents appartiennent tous à $E(\beta)$ et par suite à $E(\alpha)$. Donc, tout point de $E(\alpha)$ est point limite des points de $E(\alpha)$. D'autre part, tout point limite des points de $E(\alpha)$ est de $E(\alpha)$. Donc, $E(\alpha)$ est parfait.

II. Si α un point où la suite $\varphi_n(z)$ est normale est point limite d'antécédents de β , β est point limite de conséquents de α . En effet, si β n'est pas point limite de conséquents de α , on a $|\varphi_n(\alpha) - \beta| > \rho$ pour $n > N$ et par suite,

$$(8) \quad |\varphi_n(z) - \beta| > \eta \text{ pour } |z - \alpha| < \varepsilon \text{ et } n > N,$$

d'après le théorème précédent. Or, α étant point limite d'antécédents de β , on peut trouver un entier m tel que l'on ait

$m > N$, $|\beta_{-m} - \alpha| < \varepsilon$ et $|\varphi_m(\beta_{-m}) - \beta| = 0$,
ce qui contredit (8). β doit donc être point limite de
conséquents de α . On montre de la même manière que
si α où la suite des fonctions inverses $\varphi_{-n}(z)$ est
normale, est point limite de conséquents de β , β est
point limite d'antécédents de α .

III. Si α est un point limite de conséquents de β sans
que β soit point limite d'antécédents de α , α est point
limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$. En effet,
supposons d'abord que tous les zéros de $\varphi'(z)$ sont des
points exceptionnels. Alors $\varphi(z)$ admet deux points
exceptionnels, si $\varphi(z)$ n'est pas du premier degré. En
les prenant pour ∞ et 0 , on a $\varphi(z) = z^{\pm k}$ et par suite
 $\varphi_n(z) = z^{(\pm k)^n}$, $\varphi_{-n}(z) = z^{\frac{1}{(\pm k)^n}}$. ∞ et 0 sont les seuls
points limites de conséquents des zéros de $\varphi'(z)$. Si
 $\alpha \neq \infty$ et $\alpha \neq 0$, la suite $\varphi_{-n}(z)$ sera normale en α ;
car, dans un cercle ayant pour centre α et ne contenant
pas 0 à l'intérieur, les diverses branches de $\varphi_{-n}(z)$
sont uniformes et bornées dans leur ensemble. Donc,
d'après la dernière remarque dans II, α est point limite
de conséquents de β en même temps que β est point
limite d'antécédents de α , ce qui contredit l'hypothèse.
Considérons maintenant le cas où il y a au moins un
zéro de $\varphi'(z)$, qui n'est pas point exceptionnel, et qui
admet par suite une infinité d'antécédents distincts. Si
 α n'est pas point limite de conséquents d'un zéro de
 $\varphi'(z)$, deux cas sont à distinguer. 1° α n'est pas un
conséquent d'un zéro de $\varphi'(z)$. Alors, il existe un cercle
 γ de centre α dans lequel il n'y a aucun conséquent
d'un zéro de $\varphi'(z)$. Les diverses branches de $\varphi_{-n}(z)$
n'admettent aucun point critique dans γ quel que soit

n , et sont par suite uniformes dans γ . Si c_{-p} , c_{-q} , c_{-r} sont trois antécédents distincts d'un zéro c de $\varphi'(z)$ qui n'est pas point exceptionnel, les diverses branches de $\varphi_{-n}(z)$ ne prennent jamais pour valeurs les trois points c_{-p} , c_{-q} , c_{-r} , pour $n > p + q + r$; car, si l'une d'elles, $\varphi_{-n}(z)$ prend c_{-p} pour valeur il existera dans γ le point $\varphi_n(c_{-p})$, qui est un conséquent de rang $n - p > q + r$ du zéro c de $\varphi'(z)$. La suite $\varphi_{-n}(z)$ est donc normale dans γ . Par suite, la seconde proposition de II nous conduit à contredire l'hypothèse de III. Il faut donc que α soit point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$.

2° $\alpha = c_p = c'_q = \dots = c_r^i$; où c_p , c'_q , $\dots c_r^i$ sont les conséquents de rang p , q , $\dots r$ des zéros c , c' , $\dots c^i$ de $\varphi'(z)$. Soit N un entier supérieur à tous les entiers p , q , $\dots r$. Aucun antécédent de rang N de α ne sera conséquent d'un zéro de $\varphi'(z)$. Si α est un point limite de conséquents de β , parmi les antécédents de rang N de α il en existe nécessairement un α_{-N} qui est aussi point limite de conséquents de β ; car, s'il existe des cercles ayant respectivement pour centres tous les antécédents de rang N dans lesquels ne se trouve aucun conséquent de β à partir d'un rang λ , il existerait aussi un cercle de centre α dans lequel il n'y a aucun conséquent de β à partir du rang $\lambda + N$. D'autre part, si β n'est pas point limite d'antécédents de α , β ne peut être point limite d'antécédents de α_{-N} puisque les antécédents de α_{-N} sont aussi les antécédents de α . Si donc on considère α_{-N} au lieu de α , on retombe dans le cas de 1°. α_{-N} doit donc être point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$. Il en résulte que α est aussi point limite de conséquents

d'un zéro de $\varphi'(z)$, d'après un raisonnement fait dans I.

5. Désignons par F l'ensemble des points du plan où la suite $\varphi_n(z)$ n'est pas normale et par G l'ensemble complémentaire de F . F a les propriétés suivantes :

1° Lorsqu'on transforme la suite $\varphi_n(z)$ par $\varphi(z)$, la nouvelle suite $\varphi[\varphi_n(z)]$ a pour F et G , $\varphi[F]$ et $\varphi[G]$ puisque si $\varphi_{p_n}(z)$ est une suite uniformément convergente dans un domaine Δ la transformée $\varphi[\varphi_{p_n}(z)]$ est aussi uniformément convergente dans le domaine transformé $\varphi[\Delta]$. Or, la suite $\varphi[\varphi_n(z)]$ ne diffère de la suite primitive $\varphi_n(z)$ qu'en y retranchant le premier terme. Les deux ensembles $\varphi[F]$ et $\varphi[G]$ sont donc identiques à F et G . Pour cette raison, nous disons que F est invariant par $\varphi(z)$. Soit $\varphi_{-1}(F)$ l'ensemble des antécédents de rang 1 de F . Si $\varphi_{-1}(F)$ contient un point α qui n'appartient pas à F , α appartiendra à G . D'après la propriété précédente de G , le conséquent de rang 1 de α serait un point de G et non pas un point de F . Il faut donc que $\varphi_{-1}(F)$ appartienne à F . D'autre part, F ne contient aucun point n'appartenant pas à $\varphi_{-1}(F)$, car $\varphi[F]$ est identique à F de sorte que tout point de F est antécédent de rang 1 d'un autre point de F et par suite appartient à $\varphi_{-1}(F)$. $\varphi_{-1}(F)$ est donc identique à F . Pour cette raison, on dit que F est complètement invariant par $\varphi_{-1}(z)$.

2° Tout point de F est un point limite d'antécédents de tous les points du plan excepté de deux points au plus. En effet, s'il existe un point de F , P , qui n'est pas point limite d'antécédents de m points distincts α_m on peut trouver un cercle γ ayant pour centre P tel

qu'à partir d'un certain rang N , aucun antécédent des m points distincts α_m ne se trouve dans γ . Alors, pour $n > N$, les fonctions $\varphi_n(z)$ ne prennent jamais pour valeurs les m points distincts α_m . Si $m > 2$, la suite $\varphi_n(z)$ deviendrait normale dans γ , ce qui contredit l'hypothèse. Donc, il existe au plus deux points α_m que les fonctions $\varphi_n(z)$ ne prennent jamais pour valeurs autour d'un point de F . En dehors des points α_m tous les points du plan admettent pour point limite d'antécédents un point quelconque de F . Il en résulte que les antécédents d'un point de α_m sont aussi de α_m ; par suite, tout point de α_m admet au plus deux antécédents distincts. α_m sont donc les deux points exceptionnels que nous venons d'examiner dans n° 3.

3° Soit $E(z)$ l'ensemble des points limites d'antécédents d'un point z qui n'est pas un point exceptionnel. D'après 2°, F est contenu dans $E(z)$. F est-il identique à $E(z)$? Nous pouvons l'affirmer seulement dans le cas où z est un des antécédents d'un cycle et ne fait pas partie du cycle. En effet, si un point λ de $E(z)$ n'appartient pas à F , z sera point limite de conséquents de λ (n° 4, II). D'autre part, si λ n'est pas un point de F , z ne sera pas non plus un point de F ; puisque λ étant par l'hypothèse un point limite d'antécédents de z , appartiendra à F si z appartient à F . Ainsi z n'étant pas de F , l'ensemble des points limites de conséquents de z est identique à celui de λ (n° 4, I). Or, z est par l'hypothèse antécédent d'un cycle, les points limites de conséquents de z sont les points qui appartiennent au cycle. Comme z est supposé ne pas faire partie du cycle, z ne pourrait être point limite de ses consé-

quents et par suite ne pourrait être point limite de conséquents de λ . Il faut donc que tout point de $E(z)$ soit un point de F .

4° F existe toujours si $\varphi(z)$ n'est pas du premier degré. En effet, l'équation $D = \varphi(z) - z = 0$ a $k + 1 \geq 3$ racines distinctes ou non, k désignant le degré de $\varphi(z)$. Un point exceptionnel annule $\varphi'(z)$ et n'annule pas $\varphi(z) - 1$, de sorte que si un point exceptionnel est une racine de $D = 0$, il, en sera une racine simple. Comme il existe au plus deux points exceptionnels et que $D = 0$ est de degré $k + 1 \geq 3$, il en résulte que $D = 0$ admet au moins une racine t qui n'est pas un point exceptionnel. t admet donc une infinité d'antécédents distincts. Si l'on considère un antécédent de t qui se distingue de t , les antécédents de cet antécédent admettent F pour limite d'après le paragraphe précédent. Donc F existe.

5° F n'a pas de point intérieur si G existe. En effet, on se rappelle que la suite $\varphi_n(z)$ est dite normale en un point z lorsqu'il existe un cercle γ de centre z tel qu'une suite infinie quelconque extraite de la suite $\varphi_n(z)$ contient toujours une suite infinie uniformément convergente dans γ . Donc, si la suite $\varphi_n(z)$ est normale en z , elle sera normale en tous les points à l'intérieur d'un certain cercle ayant pour centre z . L'ensemble des points G où la suite $\varphi_n(z)$ est normale a donc essentiellement des points intérieurs. Si F a un point intérieur α , il existe un cercle γ' de centre α tel que tous les points dans γ' appartiennent à F . Alors, pour z dans γ' , les fonctions $\varphi_n(z)$ ne prennent jamais pour valeurs les points de G puisque F est invariant par $\varphi_n(z)$ (n° 5, 1°).

Par conséquent, si G existe en même temps, la suite $\varphi_n(z)$ serait normale dans γ' , ce qui contredit l'hypothèse.

6° Considérons un point répulsif o , qui appartient à un cycle d'ordre r . Nous avons $\varphi_r(o) = o$ et $|\varphi'_r(o)| > 1$ ($n^\circ 2$). Posons $\Phi(z) = \varphi_r(z)$ et $\Phi_n(z) = \varphi_{nr}(z)$. Je dis que toute suite $\Phi_{p_n}(z)$ extraite de la suite $\Phi_n(z)$ n'est pas normale en o . En effet, $\Phi_{p_n}(z)$ sont bornées en o . Si la suite $\Phi_{p_n}(z)$ est normale en o , les fonctions $\Phi_{p_n}(z)$ sont bornées dans leur ensemble dans un certain cercle γ de centre o , d'après le théorème fondamental énoncé dans $n^\circ 4$. Les fonctions $\Phi_{p_n}(z)$ étant toutes holomorphes et bornées dans leur ensemble pour z dans γ , les fonctions $\Phi'_{p_n}(z)$ doivent être aussi bornées dans leur ensemble pour z dans γ . Or, cela est impossible puisqu'on a $\Phi'_{p_n}(o) = \varphi'_{pnr}(\bar{o}) = [\varphi'_r(o)]^{p_n}$, $|\varphi'_r(o)| > 1$. Donc, la suite $\Phi_n(z)$ n'est pas normale en o . Comme la suite $\varphi_n(z)$ peut être partagée en r suites $\Phi_n(z)$, $\varphi[\Phi_n(z)]$, $\dots$, $\varphi_{r-1}[\Phi_n(z)]$ qui ne sont pas normales en o , la suite $\varphi_n(z)$ n'y est pas normale non plus. Tout point répulsif est donc un point de F . Considérons un point attractif o , qui appartient à un cycle attractif d'ordre r . Nous avons $\varphi_r(o) = o$ et $|\varphi'_r(o)| < 1$, ($n^\circ 2$). Comme $|\varphi'_r(o)| < 1$, il existe un cercle γ de centre o tel qu'on a pour z dans γ , $|\varphi'_r(z)| < M < 1$. D'où, on a $|\varphi_r(z)| < M|z|$, $|\varphi_{2r}(z)| < M^2|z|$, $\dots$, $|\varphi_{nr}(z)| < M^n|z|$, $\dots$ pour z dans γ . La suite $\varphi_{nr}(z)$ converge donc uniformément vers la constante o pour z dans γ . La suite $\varphi_n(z)$ est partagée en r suites uniformément convergentes $\varphi_{nr}(z)$, $\varphi[\varphi_{nr}(z)]$, $\dots$, $\varphi_{r-1}[\varphi_{nr}(z)]$ ayant respectivement pour points limites o , o_1 , $\dots$, o_{r-1} . La suite

$\varphi_n(z)$ est donc normale en o . Par conséquent, tout point attractif n'appartient pas à F .

7° Tout point de F est point limite de l'ensemble des cycles. La démonstration de cette propriété de F repose sur le théorème suivant que l'on sait établir :

Soient A, B, C trois fonctions holomorphes dans un domaine Δ telles que $A - B \neq 0$, $B - C \neq 0$, et $C - A \neq 0$ pour z dans Δ . Si toutes les fonctions d'une famille de fonctions méromorphes dans Δ ne sont jamais égales aux A, B, C pour z dans Δ , la famille est normale dans Δ . (1)

En effet, tout point exceptionnel t est un point attractif puisqu'on a $\varphi'(t) = 0$ et $\varphi(t) = t$ ou $\varphi_2(t) = t$ (n° 3). Par suite, les points exceptionnels n'appartenant pas à F (n° 5, 6°), tout point de F admet une infinité d'antécédents distincts (n° 3). Considérons un point quelconque α de F . Si α appartient à un certain cycle, il existe toujours un de ses antécédents α_{-n} qui n'appartient à aucun cycle ; sinon, tous les antécédents distincts de α appartiendraient avec α à un cycle de même ordre et α serait un point exceptionnel. D'autre part, si α n'est pas un point limite de l'ensemble des cycles, il est clair que les antécédents de α ne le seront pas non plus, car les conséquents d'un point limite de conséquents d'un point β sont aussi des points limites de conséquents de β (n° 4, 1). Pour ces deux raisons, nous pouvons toujours supposer que le point considéré α de F n'appartient à aucun cycle et n'est pas point limite de l'ensemble des cycles. Soit donc γ un cercle de centre α tel que dans γ il n'existe aucun point qui

(1) *Bull. Soci. Math.* 1920, p. 45.

appartienne à un cycle. Si α est conséquent de rang 1 ou de rang 2 d'un zéro de $\varphi'(z)$, on peut prendre pour α un de ses antécédents de rang supérieur à 2, de sorte que γ peut être supposé ne renfermer aucun conséquent de rang 1 ou de rang 2 d'un zéro de $\varphi'(z)$. Cela étant, nous pouvons prendre une branche de $\varphi_{-2}(z)$ pour A, une branche de $\varphi_{-1}(z)$ pour B, et z pour C, tels que l'on ait pour z dans γ ,

$\varphi_{-1}(z) - z \neq 0$, $\varphi_{-2}(z) - \varphi_{-1}(z) \neq 0$, $z - \varphi_{-2}(z) \neq 0$;
et $\varphi_n(z) - z \neq 0$, $\varphi_n(z) - \varphi_{-1}(z) \neq 0$, $\varphi_n(z) - \varphi_{-2}(z) \neq 0$;
car si une des équations précédentes a lieu, on en déduit que $\varphi_n(z) - z = 0$ admettrait des racines dans γ pour un certain entier n . D'après le théorème énoncé, la suite $\varphi_n(z)$ est normale dans γ , ce qui contredit que α est un point de F. C. Q. F. D.

8° D'après une démonstration de M. Fatou, les cycles formés par les points attractifs et les points indifférents (n° 2) sont en nombre limité (1). Donc, tout point de F est un point limite de l'ensemble des points répulsifs. Comme ces derniers appartiennent à F (n° 5, 6°), il en résulte que tout point de F est point limite des points de F. D'autre part, tout point limite des points de F est de F. Donc, F est parfait.

9° En un point quelconque de F, aucune suite partielle extraite de la suite $\varphi_n(z)$ ne peut être normale. En effet, d'après ce qui précède, tout point de F est point limite de l'ensemble des points répulsifs. Nous avons vu dans n° 5, 6° qu'aucune suite $\varphi_{p_n}(z)$ extraite de la suite $\varphi_n(z)$ n'est normale en un point répulsif. Par suite,

(1) *Bull. Soc. Math.* 1920, p. 63-69.

toute suite partielle $\varphi_{p_n}(z)$ n'est pas normale en un point de F.

10° Soit γ un cercle ayant pour centre un point de F. Quel que soit le rayon de γ , γ renferme à l'intérieur une infinité de points répulsifs. Soit ε un point répulsif situé dans γ et appartenant à un cycle d'ordre r . On a $\varphi_r(\varepsilon) - \varepsilon = 0$ et $|\varphi'_r(\varepsilon)| > 1$. Comme $|\varphi'_r(\varepsilon)| > 1$, il existe un cercle γ' ayant pour centre ε tel que pour z dans γ' , on a $|\varphi'_r(z)| > m > 1$. D'où, $|\varphi_r(z) - \varepsilon| > m |z - \varepsilon|$. Le conséquent γ'_r contient donc le cercle de centre ε et de rayon $m\rho$, ρ étant le rayon de γ' et par suite contient γ' . On voit que $\varphi_r(\gamma'_r) = \gamma'_{2r}$ contient γ'_r et $\varphi_r(\gamma'_{nr}) = \gamma'_{(n+1)r}$ contient γ'_{nr} . Nous supposons qu'on a pris pour γ' un cercle assez petit pour qu'il soit contenu dans γ . Il existe un entier λ tel que pour $n \geq \lambda$ tous les conséquents γ'_{nr} contiennent γ ; sinon, la suite $\varphi_{nr}(z)$ serait normale dans γ' . Il en résulte que le conséquent $\varphi_{\lambda r}(\gamma)$ de γ contient complètement γ , puisque γ contient γ' et $\varphi_{\lambda r}(\gamma')$ contient γ . De même, $\varphi_{\lambda r}(\gamma_{\lambda r}) = \gamma_{2\lambda r}$ contient $\gamma_{\lambda r}$ et $\varphi_{\lambda r}(\gamma_{n\lambda r}) = \gamma_{(n+1)\lambda r}$ contient $\gamma_{n\lambda r}$. S'il n'existe aucun point exceptionnel, tout point A du plan doit se trouver dans l'une des aires $\gamma_{n\lambda r}$; sinon, ou bien la suite serait normale dans γ ou bien A serait un point exceptionnel. Par conséquent, d'après le théorème généralisé de Borel-Lebesgue un nombre fini de $\gamma_{n\lambda r}$ suffit pour recouvrir tout le plan complet. S'il existe un ou deux points exceptionnels α , considérons un cercle ε ayant pour centre α . Pour la même raison que celle de tout-à l'heure l'extérieur de ε est recouvert par un nombre fini de $\gamma_{n\lambda r}$ c'est-à-dire par une certaine aire $\gamma_{N\lambda r}$

puisque $\gamma_{(n+1)\lambda r}$ contient $\gamma_{n\lambda r}$ quel que soit n . Si l'on prend ε assez petit pour que F n'ait aucun point dans ε , F sera recouvert par une certaine aire $\gamma_{N\lambda r}$. Ainsi donc, quel que soit le rayon d'un cercle γ ayant pour centre un point de F , il existe un entier m tel que l'aire décrite par $\varphi_m(z)$ pour z dans γ recouvre tout le plan ou du moins F . $\varphi_m(z)$ fait donc correspondre à F une partie de F . Par conséquent si F est discontinu dans une partie quelconque, F est complètement discontinu. Ainsi, on dit que F a une structure homogène.

6. Nous passons maintenant à examiner G . Si F ne recouvre pas tout le plan, F est un ensemble linéaire continu ou discontinu. G est, par définition, l'ensemble complémentaire de F et, par suite, un ensemble ouvert dont tous les points sont des points intérieurs (n° 5, 5°). Donc, G est divisé par F en certains domaines connexes limités par F . Nous désignons ces domaines par le mot Région. Ainsi, par définition, une région est un domaine connexe dont tous les points intérieurs appartiennent à G et tous les points de la frontière appartiennent à F . Il en résulte que si deux régions P et Q ont un point intérieur commun α , P est identique à Q ; car, s'il existe en même temps un point intérieur β de P qui n'est pas un point intérieur de Q , on ne peut pas joindre de α à β par une ligne L située entièrement dans P puisque L doit passer par des points de la frontière de Q , et P ne serait plus connexe. Etant donné une région P , les fonctions $\varphi_n(z)$ et $\varphi_{-n}(z)$ lui font correspondre une suite de conséquents P_n et une suite d'antécédents P_{-n} . P_n et P_{-n} sont toutes des régions ;

deux quelconques entre elles sont ou bien complètement distinctes ou bien identiques, de sorte que pour l'énumération des P_n et P_{-n} , il y a une analogie entre un point et une région. En répétant le raisonnement que nous avons fait dans n° 2 et n° 3, on voit que pour que les P_n distinctes soient en nombre limité il faut qu'il existe deux entiers m et r tels que $P_{m+r} = P_m$, et P_{m+1} , $P_{m+2} \dots P_{m+r}$ soient toutes distinctes. Les r régions P_{m+1} , $P_{m+2} \dots$, P_{m+r} sont respectivement invariantes par $\varphi_r(z)$, et à partir du rang m , la suite P_n ne comprend que r termes distincts. Pour que les P_{-n} distinctes soient en nombre limité, il faut d'abord que les k antécédentes de rang 1, P_{-1} soient confondues en une seule P_{-1} ; alors, P doit contenir $k-1$ points critiques de $\varphi_{-1}(z)$. Par conséquent, il existe au plus deux régions dont le nombre des antécédentes distinctes est fini, puisqu'il n'existe que $2(k-1)$ points critiques de $\varphi_{-1}(z)$. Donc, une telle région P doit être invariante par $\varphi(z)$ ou par $\varphi_2(z)$, et toutes ses antécédentes de rang 1 ou de rang 2 lui coïncident. Ainsi, si le plan comprend plus de deux régions, il en contiendra une infinité; car, lorsqu'il y a plus de deux régions, il existe au moins une région qui admet une infinité d'antécédentes distinctes.

Soit Δ un domaine situé complètement dans une région P . La suite $\varphi_n(z)$ étant normale dans Δ , prenons dans la suite $\varphi_n(z)$ une suite uniformément convergente $\varphi_{p_n}(z)$. La suite $\varphi_{p_n}(z)$ peut admettre pour limite soit une constante, soit une fonction non constante. M. Julia a annoncé dans ses notes sur l'itération

de fractions rationnelles ⁽¹⁾ que toutes les fonctions limites admises par la suite $\varphi_n(z)$ sont des constantes, si $\varphi_n(z)$ est une fraction rationnelle. Nous ne pouvons pas démontrer ici que la suite $\varphi_n(z)$ n'admet pas rigoureusement des fonctions limites non constantes. Mais, nous nous bornons à faire cette hypothèse. Cela étant, les conséquents Δ_n de Δ tendent vers des points pour limites. Considérons les conséquents P_n de la région P y comprise la frontière. 1° Il peut arriver que P_n soient tous distincts quel que soit n . Alors, les régions P_n avec leurs frontières se réduisent soit à des points, soit à des lignes, car, si on prend pour le point de l'infini un point dans P , l'ensemble des P_n restent dans un certain cercle et par suite, on ne peut pas trouver dans la suite P_n une suite P_{p_n} telle que les régions P_{p_n} contiennent toujours un cercle d'un rayon fixe quelque soit n . Soient β un point dans P et E , l'ensemble des points limites de conséquents de β . E appartient à F , puisque les points de E sont aussi points limites des points de F situés sur les frontières de P_n . Donc, β n'est pas point limite d'antécédents d'un point de E : il en résulte d'après n° 4, III que tout point de E est point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$. 2° Il existe deux entiers m et r tels qu'on a $P_{m+r} = P_m$ et $P_{m+1}, P_{m+2}, \dots, P_{m+r}$ sont distinctes. Soit Δ' un domaine dans une des r régions invariantes P_m . Les conséquents Δ'_{nr} sont aussi dans P_m . Par conséquent, Δ' peut être pris de manière que Δ' et Δ'_r aient des points communs; par suite, Δ'_{nr} et $\Delta'_{(n+1)r}$ ont aussi des points com-

(1) *Comptes rendus*, t. 468, 1919.

muns. Donc, le domaine $s = \Delta' + \Delta'_r + \cdots \Delta'_{nr} + \cdots$ est connexe et contient son conséquent s_r . La suite $\varphi_{nr}(z)$ est uniformément convergente dans s et par suite dans P_m . L'ensemble E des points limites de la suite $\varphi_n(z)$ est donc un cycle. On voit comme au 1° que tout point de E est aussi point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$ (n° 4, III et n° 5, 3°).

CHAPITRE II

Sur les points limites de l'ensemble des points critiques des $\varphi_{-n}(z)$.

7. Considérons un point indifférent o appartenant à un cycle que nous supposons, pour simplifier l'écriture, d'ordre 1. On a $\varphi(o) = o$ et $\varphi'(o) = e^{i\theta}$ ($n^\circ 2$). Si o n'appartient pas à F , les fonctions limites de la suite $\varphi_n(z)$ sont des fonctions non constantes, car, si une suite partielle $\varphi_{p_n}(z)$ converge à une constante pour z dans un domaine contenant o , la suite $\varphi'_{p_n}(o) = [\varphi'(o)]^{p_n}$ doit converger à zéro, ce qui n'a pas lieu pour $|\varphi'(o)| = 1$.

Si o appartient à F , o est point limite de conséquent d'un zéro de $\varphi'(z)$ qui n'est pas antécédent de o . En effet, par l'hypothèse, $\varphi_n(o) = o$ et $\varphi'_n(o) \neq o$. Dans le voisinage de o , il existe toujours une et une seule branche de la fonction inverse de $\varphi_n(z)$ qui prend la valeur o pour $z = o$. Désignons par $\overline{\varphi_{-n}(z)}$ cette branche de la fonction inverse de $\varphi_n(z)$. Le point o n'est pas un point critique de $\overline{\varphi_{-n}(z)}$, quel que soit n . Soit donc γ_n le cercle ayant pour centre o et passant par le point critique de $\overline{\varphi_{-n}(z)}$ le plus rapproché de o . $\overline{\varphi_{-n}(z)}$ est

uniforme dans γ_n . A la suite de cercles γ_n correspond une suite de nombres ρ_n qui sont les rayons de γ_n . Supposons que la suite ρ_n ne contienne aucune suite partielle qui converge à zéro, nous avons $P_n > \omega$ quel que soit n . Le cercle Δ de centre o et de rayon ω est intérieur à tous les cercles γ_n ; par suite, toutes les fonctions $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ sont uniformes dans Δ . De plus, la fonction $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ ne prend jamais pour valeur un point α tel que α est un zéro de $\varphi'(z)$ ou un antécédent de rang inférieur à $n-1$ d'un zéro de $\varphi'(z)$; car, dans le cas contraire, Δ contiendra un conséquent de rang n ou de rang inférieur à n d'un zéro de $\varphi'(z)$, qui est un point critique de $\overline{\varphi_{-n}}(z)$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, si l'ensemble des zéros de $\varphi'(z)$ ne se réduit pas aux deux points exceptionnels, c'est-à-dire s'il existe un zéro de $\varphi'(z)$ qui admet au moins trois antécédents distincts de rang inférieur à N , les fonctions $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ pour $n > N$ ne prennent jamais pour valeurs trois points distincts. La suite $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ est donc normale dans Δ . Si l'ensemble des zéros de $\varphi'(z)$ se réduit aux deux points exceptionnels, on a vu dans (n° 4, III) que la suite $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ est normale dans tout cercle qui ne contient aucun point exceptionnel. Donc, quel que soit $\varphi(z)$, la suite $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ est normale dans Δ . Nous voyons que cela est impossible. Car, d'une part, si une suite $\overline{\varphi_{-p_n}}(z)$ extraite dans la suite $\overline{\varphi_{-n}}(z)$ converge à une constante, la suite $\overline{\varphi'_{-p_n}}(o)$ doit converger à zéro, ce qui n'est possible que pour $|\varphi'(o)| > 1$. D'autre part, si une suite extraite $\overline{\varphi_{-p_n}}(z)$ convergeait à une fonction non constante $\Phi(z)$, o n'appartiendrait plus à F . En effet, d'après un théorème dans la théorie

de suites de fonctions, pour que $\Phi(z)$ prenne la valeur α pour $z = z_0$ il faut et il suffit que, pour n assez grand, toutes les fonctions $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ prennent la valeur α dans le voisinage de z_0 . Soit donc Δ' un cercle de centre o et de rayon ω' tel que $\omega' < \omega$, ω étant le rayon du cercle Δ . $\Phi(z)$ décrit un domaine S' lorsque z décrit Δ' . On peut trouver un entier N et un cercle Δ'' de centre o tel que pour z dans Δ'' toutes les fonctions $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ prennent des valeurs dans S' pour $n > N$. Il en résulte que toutes les fonctions $\varphi_{p_n}(z)$ pour $n > N$ ne prennent pour valeurs que des points dans Δ'' , lorsque z est dans S' . Or, S' contient o puisque toutes les fonctions $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ le contiennent. La suite $\varphi_{p_n}(z)$ est donc normale en o . Il en résulte que la suite $\varphi_n(z)$ est aussi normale en o , d'après n° 5, 9°. Remarquons de plus que tout point dans S' est point limite de la suite d'antécédents $\overline{\varphi_{-p'_n}(z)}$ d'un point z dans Δ' ; par conséquent, tout point dans Δ' est point limite de la suite de conséquents $\varphi_{p_n}(z)$ d'un point z dans S' (n° 4, II). La suite $\varphi_{p_n}(z)$ converge donc vers une fonction non constante, pour z dans S' . Cela montre que si la suite $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ est normale en o , o ne peut être un point indifférent appartenant à F , ni être un point attractif, car si o est un point attractif, la suite $\varphi_n(z)$ converge uniformément vers une constante dans un certain domaine de o (n° 5, 6°).

D'après la discussion précédente, nous voyons que les nombres ρ_n ne peuvent être bornés inférieurement. La suite ρ_n doit comprendre une suite convergente ρ_{p_n} ayant zéro pour limite; les cercles correspondants γ_{p_n} tendent vers le point o pour limite. Par conséquent,

dans le voisinage de o il y a une infinité de points critiques des fonctions $\overline{\varphi_{-n}}(z)$, c'est-à-dire une infinité de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$.

Remarque I. — Si θ dans $\varphi'(o) = e^{i\theta}$ est de la forme $\frac{2p}{q}\pi$, $\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible, on peut montrer qu'il existe q ou un multiple de q secteurs circulaires Δ ayant leurs sommets en o , tels que les Δ contiennent respectivement leur conséquent de rang q . Alors, la suite $\varphi_{nq}(z)$ converge uniformément à o dans Δ ; et par suite, o appartient à F . Si o est incommensurable à 2π , M. Julia dit que o appartient aussi à F ⁽¹⁾; mais nous ne pouvons pas trouver la démonstration de M. Julia ni des exemples.

Remarque II — Si on remplace dans le raisonnement précédent le point indifférent o par un point attractif o tel que $\varphi'(o) \neq o$, on obtiendra la même conclusion. On peut donc dire que tout point attractif o tel que $\varphi(o) = o$ et $\varphi'(o) \neq o$ est un point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$ qui n'est pas antécédent de o .

8. Désignons par $E(c)$ l'ensemble des points limites de conséquents des zéros de $\varphi'(z)$. Si α est un point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'_n(z)$, α appartient aussi à $E(c)$ puisque l'ensemble des zéros de $\varphi'_n(z)$ est formé par les zéros de $\varphi'(z)$ et leurs antécédents jusqu'à de rang $n - 1$. Etant donné $\varphi(z)$, $E(c)$ peut comprendre une infinité de points ou un nombre fini de points. Nous ne connaissons aucun exemple du pre-

(1) *Comptes rendus*, t. 168, 1919.

mier cas. Bornons-nous donc au deuxième cas. $E(c)$ est alors formé par un nombre fini de cycles. D'après le numéro précédent ces cycles peuvent être formés par des points attractifs ou par des points indifférents appartenant à F . Si $E(c)$ contient un cycle de points répulsifs, ces points répulsifs doivent être conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$, car, d'après un résultat de Fatou (1), si un point répulsif α est point limite de conséquents d'un point β qui n'est pas antécédent de α il y a, dans le voisinage de α une infinité de points limites de conséquents de β . Examinons le cas où tous les zéros de $\varphi'(z)$ sont des antécédents de certains cycles P , sans appartenir eux-mêmes aux cycles. Ces cycles P sont formés par des points répulsifs. En effet, par l'hypothèse, aucun zéro de $\varphi'(z)$ n'appartient à P ; il en résulte qu'aucun zéro de $\varphi'_n(z)$ n'appartient à P . Si P comprend un point α tel que α est un point attractif ou un point indifférent appartenant à F , α doit être point limite de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$ qui n'est pas antécédent de α (n° 7). Cela n'est pas possible puisque par l'hypothèse, tous les zéros de $\varphi'(z)$ étant des antécédents des cycles, leurs conséquents sont en nombre fini. Enfin, si P comprend un point indifférent α qui n'appartient pas à F , la suite $\varphi'^n(z)$ admet des fonctions limites non constantes dans la région où se trouve α (n° 7). Nous montrerons tout à l'heure qu'il y aura alors une infinité de points limites de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi donc, P sont des points répulsifs. Cela étant, montrons que tout

(1) *Bull. Soc. Math.*, 1919, p. 222.

point du plan appartient à F . S'il existe dans le plan un domaine Δ dans lequel la suite $\varphi_n(z)$ est normale, les fonctions limites de la suite $\varphi_n(z)$ ne peuvent pas être des constantes. En effet, nous avons vu dans n° 6 que si la suite $\varphi_n(z)$ admet des fonctions limites constantes dans Δ , les constantes limites sont des points limites de conséquents d'un zéro de $\varphi'(z)$. Par conséquent, les points limites de conséquents des points dans Δ doivent être les points répulsifs P . Or, les points répulsifs appartiennent à F ; par suite, les points dans Δ ne sont pas des antécédents de P . Il en résulte d'après le théorème de Fatou énoncé plus haut qu'il y aurait une infinité de points limites de conséquents des points de Δ , dans le voisinage des points de P . Par suite, il existerait une infinité de points de $E(c)$, ce qui contredit l'hypothèse. Supposons maintenant que la suite $\varphi_n(z)$ admette des fonctions limites non constantes dans Δ . Soit S la région qui contient Δ , S étant limitée par des points de F . Les conséquents S_n ne peuvent être distincts, quel que soit n . Car, si une suite $\varphi_{p_n}(z)$ converge à une fonction $\Phi(z)$, pour que $\Phi(z)$ prenne une valeur α pour un point z dans Δ , il faut et il suffit que pour n assez grand toutes les fonctions $\varphi_{p_n}(z)$ prennent la valeur α dans le voisinage de z , ce qui montre que, pour n assez grand, les régions S_{p_n} ont des points communs et par suite sont identiques (n° 6). Donc, à partir d'un certain rang, S_n se confondent avec des régions invariantes par une certaine fonction itérative $\varphi_\lambda(z)$. Considérons la frontière L d'une région invariante R de S_n . Tout point sur L a un antécédent sur L puisque, R étant une région invariante, tout point dans R a un antécédent dans R . Cela

étant, supposons qu'un point β sur L n'appartient pas à l'ensemble $E(c)$ que l'on définit au début du paragraphe. Les antécédents de β n'appartiennent pas à $E(c)$ non plus. Si β est un conséquent de rang N d'un zéro de $\varphi'(z)$, β ne peut faire partie d'aucun cycle, sinon β appartiendrait à $E(c)$. On peut donc trouver sur L un antécédent de β de rang supérieur à N , qui n'est pas conséquent des zéros de $\varphi'(z)$. Ainsi, nous pouvons toujours supposer que nous avons pris pour β un point n'étant pas de $E(c)$, ni conséquent d'un zéro de $\varphi'(z)$. Alors, il existe un cercle γ de centre β tel que dans γ il n'y a aucun conséquent des zéros de $\varphi'(z)$. Nous avons montré dans (n° 4, III) que la suite $\varphi_{-n}(z)$ est normale dans γ . Or, cela est impossible. En effet, soient $\beta_{-n\lambda}$ une suite d'antécédents de β qui se trouvent sur L et $\overline{\varphi_{-n\lambda}(z)}$ la suite des branches de $\varphi_{-n\lambda}(z)$ qui contiennent respectivement des points $\beta_{-n\lambda}$. Si une suite $\overline{\varphi_{-q_n}(z)}$ extraite dans la suite $\overline{\varphi_{-n\lambda}(z)}$ converge à une fonction limite non constante $\Phi_{-1}(z)$, il existe dans l'aire Δ décrite par $\Phi_{-1}(z)$ un domaine Δ' contenant le point limite des antécédents β_{-q_n} tel que Δ' est intérieur à toutes les aires décrites par $\overline{\varphi_{-q_n}(z)}$ pour n assez grand. La suite $\varphi_{q_n}(z)$ serait alors normale dans Δ' , ce qui contredit l'hypothèse que Δ' contient un point sur L . D'autre part, pour montrer que $\Phi_{-1}(z)$ ne peut être une constante, il suffit de montrer d'abord, que dans R il n'y a aucun zéro de $\varphi'(z)$. S'il y a un zéro c de $\varphi'(z)$ dans R , c a une infinité d'antécédents distincts dans R , puisque tout point dans R admet un antécédent dans R et comme c situé dans R ne peut appartenir à aucun cycle, tous les antécédents de c de rangs diffé-

rents sont distincts. Or, un antécédent de rang N de c annule toutes les $\varphi'_n(z)$ pour $n > N$ et par suite, annule toutes les fonctions limites de la suite $\varphi'_n(z)$. Donc, tous les antécédents $c_{-n\lambda}$ de c situés dans R sont des zéros de toutes les fonctions limites de la suite $\varphi'_n(z)$. La suite $c_{-n\lambda}$ ne peut avoir tous les points limites sur la frontière L . En effet, R et les antécédentes de R étant des régions à fonctions limites non constantes, si un zéro c' de $\varphi'(z)$ se trouve dans R ou dans une région antécédente de R , il existe un cercle γ de centre c' tel que pour z dans γ , toutes les fonctions $\varphi_n(z)$ pour n assez grand prennent pour valeurs l'ensemble des points limites des conséquents de c' . Par conséquent, l'ensemble des conséquents situés dans R des zéros de $\varphi'(z)$ peut être renfermé dans un domaine Δ' intérieur à R . Cela étant, désignons par S l'ensemble des points dans R extérieurs à Δ' . S ne contient aucun conséquent d'un zéro de $\varphi'(z)$ de sorte que la suite $\varphi_{-n}(z)$ est normale dans tout cercle situé complètement dans S (n° 4, III). Considérons dans R un domaine Δ contenant entièrement Δ' , et la suite $\varphi_{n\lambda}(z)$, en nous rappelant que R a été supposée invariante par $\varphi_\lambda(z)$. Si les fonctions limites de la suite $\varphi_{n\lambda}(z)$ ne prennent jamais pour valeurs des points intérieurs de S pour z dans Δ , elles ne prennent alors que des points dans Δ' pour valeurs; par suite, il existe un entier ν tel que l'aire Δ_ν décrite par $\varphi_{\nu\lambda}(z)$ est contenue complètement dans Δ . L'aire Δ_ν contient donc $\varphi_{\nu\lambda}(\Delta_\nu) = \Delta_{2\nu}$ et $\varphi_{n\nu\lambda}(\Delta_\nu) = \Delta_{(n+1)\nu}$ contient $\Delta_{(n+2)\nu}$ quel que soit n . La suite $\varphi_{n\nu\lambda}(z)$ sera donc uniformément convergente dans Δ_ν , ayant une constante pour limite et la suite $\varphi_{n\lambda}(z)$ n'admettrait plus

de fonctions limites non constantes. Par conséquent, il faut supposer qu'il y a une fonction limite $\Phi(z)$ telle que $\Phi(z_0) = A$, A étant un point dans S . Soient $\varphi_{p_n}(z)$ la suite qui converge à $\Phi(z)$ et γ un cercle de centre z_0 tel que pour z dans γ , $\Phi(z)$ décrit une aire complètement intérieure à S . Prenons dans cette aire un cercle Γ ayant pour centre A . On a à partir d'une certaine valeur de n , $|\varphi_{p_n}(z_0) - A| < \varepsilon$, ε étant le rayon de Γ . La suite $\varphi_{-n}(z)$ étant normale dans Γ , considérons une suite de branches de fonctions $\varphi_{-p_n}(z)$, $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$, telles que $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ prennent toutes le point z_0 à partir d'une certaine valeur de n . Je dis que toutes les fonctions limites de la suite $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ sont non constantes. Car, si une suite $\overline{\varphi_{-r_n}(z)}$ extraite dans la suite $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ converge à une constante, la suite dérivée $\overline{\varphi'_{-r_n}(z)}$ converge à zéro quel que soit z dans Γ , ce qui entraîne que les $\varphi'_{r_n}(z)$ ne sont pas bornées dans leur ensemble pour z dans γ , ce qui est impossible si nous prenons convenablement le point de l'infini. Ainsi, toutes les fonctions limites de la suite $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ sont non constantes dans Γ . Revenons-nous à la suite d'antécédents $c_{-n\lambda}$. Si elle a un point limite sur la frontière, il existe certainement un point $c_{-n\lambda}$ dans S . Si on décrit dans S une aire simple Q joignant $c_{-n\lambda}$ à Γ , on voit que la suite $\overline{\varphi_{-p_n}(z)}$ admet des fonctions limites non constantes dans Q . Par suite, la suite $c_{-n\lambda}$ admet au moins un point limite dans R . Il en résulte que s'il existe un zéro de $\varphi'(z)$ dans R , les fonctions limites de la suite $\varphi_{n\lambda}(z)$ admettraient une infinité de zéros ayant au moins un point limite dans R , ce qui est impossible. Donc, on peut en conclure que :

Il n'existe aucun zéro de $\varphi'(z)$ dans une région invariante à fonctions limites non constantes.

D'après cela, la suite $\varphi_{-n}(z)$ est normale dans R et il n'existe qu'une branche $\overline{\varphi_{-n\lambda}(z)}$ de chaque fonction $\varphi_{-n\lambda}(z)$ qui prend des valeurs dans R pour z dans R . On voit comme tout à l'heure que toutes les fonctions limites de la suite $\overline{\varphi_{-n\lambda}(z)}$ ne sont pas des constantes. Si donc, il existe un point β sur la frontière L de R et un cercle γ ayant β pour centre tel que la suite $\varphi_{-n}(z)$ est normale dans γ , la suite $\varphi_{-n}(z)$ sera normale dans le domaine connexe $R + \gamma$, de sorte que la suite $\overline{\varphi_{-n\lambda}(z)}$ des branches de $\varphi_{-n\lambda}(z)$, restreintes dans R pour z dans R (z) est identique à la suite des branches de $\varphi_{-n\lambda}(z)$ qui prennent pour valeurs les points $\beta_{-n\lambda}$ sur L pour z dans γ . Donc, il n'existe aucune suite partielle $\overline{\varphi_{-qn}(z)}$ dans la suite $\varphi_{-n}(z)$ telle que les fonctions $\overline{\varphi_{-qn}(z)}$ prennent pour valeurs les points β_{-qn} situés sur L pour z dans γ et que la suite $\overline{\varphi_{-qn}(z)}$ converge à une constante. Comme nous avons montré d'autre part qu'il ne peut exister non plus aucune suite partielle $\overline{\varphi_{-qn}(z)}$ dans la suite $\overline{\varphi_{-n\lambda}(z)}$ telle que la suite $\overline{\varphi_{-qn}(z)}$ converge à une fonction limite non constante, il en résulte que le point β ne peut exister. Nous pouvons donc conclure que :

Tout point de la frontière de R est un point limite de conséquents des zéros de $\varphi'(z)$.⁽¹⁾

Par conséquent, si $E(c)$ ne comprend qu'un nombre fini de points, les régions à fonctions limites non

(1) Référence : *Bull. Soc. Math.* 1920, p. 55-57, 69-70.

constantes ne se présentent pas. Il en résulte d'après ce qui précède que :

Si tous les zéros de $\varphi'(z)$ deviennent antécédents des cycles sans appartenir eux-mêmes à aucun cycle, F est identique au plan complet.

Nous avons comme exemples :

$$z_1 = \frac{z}{(z+a)^n} \text{ avec } a^n + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = 0 ; \quad z_1 = \frac{\theta-1}{(z+1)^n} \text{ avec } \theta^n = 1.$$

CHAPITRE III

Quelques propriétés des fractions du second degré et à coefficients réels

9. Faisons d'abord une remarque sur les fractions à coefficients réels. A deux points $z, \bar{z}$ symétriques par rapport à l'axe réel ox , la fraction $\varphi(z)$ nous fait correspondre deux points $z_1, \bar{z}_1$ aussi symétriques par rapport à ox . Donc, les conséquents de deux domaines symétriques par rapport à ox sont aussi symétriques par rapport à ox . Si Δ_{-1} est l'ensemble des antécédents de rang 1 d'un domaine Δ , l'ensemble des domaines symétriques à Δ_{-1} est antécédent de rang 1 d'un domaine symétrique à Δ par rapport à ox , de sorte que les antécédents de deux domaines symétriques par rapport à ox sont aussi symétriques par rapport à ox . Si z est un point de F , le point symétrique à z est aussi un point de F . En effet, lorsqu'une suite de conséquents Δ_{p_n} d'un domaine Δ converge à un point ou à un domaine, la suite des domaines $\bar{\Delta}_{p_n}$ symétriques à Δ_{p_n} par rapport à ox , converge aussi à un point ou à un domaine. Or, $\bar{\Delta}_{p_n}$ est conséquent de rang p_n .

du domaine $\bar{\Delta}$ symétrique à Δ , puisque $\bar{\Delta}_{p_n}$ est symétrique à Δ_{p_n} ; il en résulte que la suite $\varphi_{p_n}(z)$ converge uniformément dans Δ et dans $\bar{\Delta}$; donc, la suite $\varphi_n(z)$ est normale dans Δ et dans $\bar{\Delta}$. Ainsi, F est symétrique par rapport à ox .

On conclut de là que si une région S contient un segment réel, S est symétrique à elle-même par rapport à ox , car, S et la région symétrique à S par rapport à ox ont des points intérieurs communs et par suite se coïncident (n° 6). Par conséquent, si S est simplement connexe, S ne peut contenir qu'un segment réel au plus. En effet, si S contient deux segments réels $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ tels que les extrémités $a, b; c, d$ sont des points sur la frontière, on peut décrire dans S une courbe de Jordan Γ joignant un point intérieur sur $\overline{ab}$ à un point intérieur sur $\overline{cd}$, telle que Γ est située complètement d'un côté de ox . Si cela n'était pas possible, les points dans $\overline{ab}$ ne seraient plus connexes avec les points dans $\overline{cd}$. A la courbe Γ , correspond donc par symétrie une courbe Γ' située entièrement dans le côté opposé à Γ , de sorte que l'ensemble des deux courbes Γ et Γ' est une courbe de Jordan fermée simple. Celle-ci partage alors le plan en deux aires simples, telles que dans l'une se trouvent deux des extrémités a, c et dans l'autre se trouvent les deux autres extrémités b, d , ce qui montre que S ne serait plus simplement connexe.

10. Considérons une fraction du second degré $\varphi(z)$ dont les coefficients sont réels. Nous nous proposons de démontrer que si $\varphi(z)$ admet deux points attractifs appartenant à un cycle d'ordre 2, $\varphi(z)$ ne peut admettre

un troisième point attractif ou indifférent appartenant à un cycle d'ordre supérieur à 2.

Soient α et α_1 deux points tels qu'on a $\varphi(\alpha) = \alpha_1$, $\varphi_2(\alpha) = \alpha$, et $|\varphi'_2(\alpha)| < 1$. Lorsque les deux points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont imaginaires conjugués, l'équation en z , $z_1 - \varphi(z) = 0$, n'a pas de racine imaginaire pour des valeurs réelles de z_1 . Par conséquent, les deux antécédents de rang 1 d'un point réel sont réels. Il en résulte que tous les antécédents d'un point réel sont réels. F est donc porté par l'axe réel (n° 5, 2°), et il ne peut exister plus de deux régions. Notre proposition est donc exacte dans ce cas. Il ne nous faut qu'examiner le cas où les deux points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont réels. Alors, α et α_1 doivent être supposés réels puisque tous les conséquents des zéros de $\varphi'(z)$ sont réels. Les deux régions invariantes relatives à α et α_1 contiennent respectivement un, et un seul, segment réel (1). Considérons un de ces segments réels, $\overline{ab}$. $\overline{ab}$ est invariant par $\varphi_2(z)$, de sorte que les deux extrémités a et b sont aussi invariantes par $\varphi_2(z)$. Trois cas sont donc à distinguer : 1° $\varphi_2(a) = a$, $\varphi_2(b) = b$; 2° $\varphi_2(a) = b$, $\varphi_2(b) = a$; 3° $\varphi_2(a) = b$, $\varphi_2(b) = b$. Remarquons, d'autre part, que chacune des deux régions invariantes relatives à α et α_1 doit contenir un zéro de $\varphi'_2(z)$. Par suite, l'une d'elles contient un zéro de $\varphi'(z)$. Comme les points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont supposés réels, les deux zéros de $\varphi'(z)$ sont aussi réels. Par conséquent, l'un des deux segments réels des

(1) Ceci résulte du n° 9, puisque nous montrerons plus loin que toute région invariante est simplement connexe.

régions invariantes considérées contient au moins un zéro de $\varphi'(z)$, qui est aussi un zéro de $\varphi'_2(z)$. Nous pouvons donc supposer que $\overline{ab}$ contient un zéro de $\varphi'_2(z)$. Il en résulte que si un point sur $\overline{ab}$, a un antécédent de rang 2 sur $\overline{ab}$, il a au moins deux antécédents de rang 2 sur $\overline{ab}$. En effet, $\varphi_2(z)$ étant à coefficients réels, en chaque zéro réel de $\varphi'_2(z)$ se joignent deux branches de $\varphi_{-2}(z)$ qui sont symétriques par rapport à ox . Si l'une de ces deux branches a un point réel, l'autre a aussi un point réel. Lorsqu'un zéro de $\varphi'_2(z)$ est sur $\overline{ab}$, les deux branches correspondantes de $\varphi_{-2}(z)$ sont restreintes dans la région invariante contenant $\overline{ab}$, de sorte que si l'une d'elles a un point sur $\overline{ab}$, l'autre a aussi un point sur $\overline{ab}$. D'après cela, les deux premiers cas des points a, b , ne sont pas possibles ; on doit avoir $\varphi_2(a)=b, \varphi_2(b)=b$. Or, on a

$$\varphi_2(z) - z = [\varphi(z) - z] P(z) = 0,$$

$P(z) = 0$ étant une équation du second degré ayant pour racines les deux points attractifs donnés α et α_1 . Donc, il faut qu'on ait $\varphi(b)=b$ pour $\varphi_2(b)=b$. Ainsi les frontières des deux régions invariantes relatives à α et α_1 ont un point commun b . Comme $\overline{ab}$ contient un zéro de $\varphi'(z)$, il en résulte que le point b admet deux antécédents de rang 1 sur $\overline{ab}$. Nous avons donc $\varphi(a)=b$ et $\varphi(b)=b$.

Cela étant, prenons b pour le point de l'infini et a pour l'origine. Nous avons

$$(1) \quad \varphi(z) = z_1 = \frac{pz^2 + qz + r}{z}$$

Le segment réel $\overline{ab}$ devient maintenant un demi axe réel. Examinons les conditions qu'on doit imposer aux

coefficients p, q, r . Nous avons remarqué qu'il suffit de considérer le cas où les deux points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont réels. Comme on a, d'après (1),

$$(2) \quad \varphi'(z) = p - \frac{r}{z^2}$$

Par suite, il faut :

$$(3) \quad pr > 0$$

pour que les points critiques soient réels. D'autre part, d'après l'énoncé de notre proposition, il suffit de considérer le cas où $\varphi(z)$ n'admet aucun point attractif ou indifférent appartenant à un cycle d'ordre 1; car si $\varphi(z)$ admet un point attractif d'ordre 1, la région invariante relative à ce point contient un zéro de $\varphi'(z)$; si $\varphi(z)$ admet un point indifférent d'ordre 1, on voit que ce point est un point indifférent rationnel (1) et par suite, la région invariante relative à ce point contient aussi un zéro de $\varphi'(z)$; il en résulte que $\varphi(z)$ n'admet plus d'autres points attractifs ou indifférents. Ainsi il faut supposer d'abord

$$(4) \quad |p| < 1$$

puisque $\varphi'(z) = p$ pour $z = \infty$ et $\varphi(\infty) = \infty$. Ensuite, il faut supposer que l'équation $\varphi(z) - z = 0$ a deux racines imaginaires car si l'équation précédente admet trois racines réelles lorsque les deux points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont réels, il y en a une au moins qui est un point attractif ou indifférent. En effet (2) peut s'écrire $z^2 [p - \varphi'(z)] = r$, ce qui montre que l'on a

$$(5) \quad \varphi'(z) < p \quad \text{pour} \quad p > 0;$$

$$\text{et } (6) \quad \varphi'(z) > p \quad \text{pour} \quad p < 0.$$

(1) On appelle point indifférent rationnel, un point α tel que $\varphi_\lambda(\alpha) = \alpha$, $\varphi'_\lambda(\alpha) = e^{i\theta}$, θ étant commensurable avec 2π .

Si l'on désigne par x et x' les deux racines de l'équation

$$(7) \quad \varphi(z) - z = (p-1)z^2 + qz + r = 0$$

nous avons $x x' = \frac{r}{p-1}$ et $x^2 x'^2 = \frac{r^2}{(p-1)^2}$.

En remplaçant x^2 , x'^2 , par $\frac{r}{p-\varphi'(x)}$, $\frac{r}{p-\varphi'(x')}$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$(8) \quad [p - \varphi'(x)] [p - \varphi'(x')] = (p-1)^2$$

Par l'hypothèse, x et x' sont réels; par suite, $\varphi'(x)$ et $\varphi'(x')$ sont réels. Il en résulte que (8) définit une correspondance de rayons réciproques par rapport au cercle de centre p et de rayon $1-p$. Par conséquent, en tenant compte de (5), (6), (8), l'un de deux points x et x' vérifie

$$\begin{aligned} p &> \varphi'(x) > p-1 & \text{si } 0 < p < 1 \\ \text{et} \quad p &< \varphi'(x) < +1 & \text{si } 0 > p > -1, \end{aligned}$$

ce qui montre que x est un point attractif. Ainsi, il faut supposer que les deux racines de l'équation (7) soient imaginaires, c'est-à-dire il faut qu'on ait en tenant compte de (7),

$$(9) \quad q^2 - 4r(p-1) < 0$$

Cela étant, considérons l'expression :

$$z_1 - z = \frac{(p-1)z^2 + qz + r}{z}$$

D'après (4) et (9), on a :

$$(z_1 - z)z = (p-1)z^2 + qz + r < 0,$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} z_1 &> z & \text{pour } z < 0 \\ \text{et} \quad z_1 &< z & \text{pour } z > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, étant donné un point quelconque sur un demi axe réel, il existe nécessairement un de ses conséquents d'un rang assez élevé qui tombe dans l'autre demi axe réel, sauf le cas où le point donné est antécédent de l'origine. Or, nous avons établi plus haut que l'une des régions invariantes relatives aux points α, α_1 , contient un demi axe réel. Il en résulte que ces régions contiennent tous les deux zéros de $\varphi'(z)$, sauf le cas où un des zéros de $\varphi'(z)$ est antécédent d'un point répulsif. Par conséquent, il n'existe pas d'autre point attractif ou indifférent.

11. Nous allons montrer que toute région invariante relative à un point attractif ou indifférent rationnel est simplement connexe si $\varphi(z)$ est une fraction du second degré ayant des coefficients tous réels. Remarquons qu'il suffit de considérer le cas où les points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont réels, car, on a vu que lorsque les points critiques de $\varphi_{-1}(z)$ sont imaginaires, F est porté complètement sur l'axe réel. Cela étant, soit R_λ une région invariante par $\varphi_\lambda(z)$ relative à un point attractif ou indifférent. On sait que R_λ est la limite d'une suite d'aires Δ_{-n} antécédentes d'un cercle ou d'un secteur circulaire. Si quel que soit n , les Δ_{-n} sont simplement connexes, R_λ est évidemment simplement connexe. Pour que R_λ ne soit pas simplement connexe, il faut donc que l'une des aires Δ_{-n} soit multiplement connexe. Pour cela, il faut et il suffit que pour certaine valeur de n , Δ_{-n} contienne les deux points critiques c_1, c'_1 de $\varphi_{-1}(z)$. Supposons que nous partions de la fraction sous la forme (1). Δ_{-n}

contenant c_1 et c'_1 , le segment réel $c_1 c'_1$ est contenu dans R_λ ou dans une autre région invariante R'_λ , et peut être supposé à distance finie puisque ∞ peut être supposé appartenant à F . Par conséquent les deux extrémités a et b du segment réel de la région sont en dehors du segment $\overline{c_1 c'_1}$ et par suite ont deux antécédents de rang 1 réels. Ces deux antécédents de rang 1 des a et b doivent se trouver aussi en dehors du segment $\overline{c_1 c'_1}$ et donnent par suite les antécédents de rang 2 aussi réels et situés en dehors de $\overline{c_1 c'_1}$. Ainsi de suite, tous les antécédents des points a et b sont réels et situés en dehors de $\overline{c_1 c'_1}$. F est donc porté complètement sur ox , et il n'existe qu'une seule région dans le plan. On voit que F est partout discontinu. Ainsi, en exceptant le cas où F est partout discontinu, toute région invariante relative à un point attractif ou à un point indifférent rationnel est simplement connexe. Remarquons d'autre part que les conséquents des points c_1 et c'_1 sont toujours réels et ne peuvent pas se trouver entre c_1 et c'_1 . L'ensemble des points limites de conséquents des c_1 et c'_1 ne peut donc délimiter le plan en deux régions. Il en résulte qu'il n'existe pas des régions à fonctions limites non constantes. On peut donc dire que toute région invariante par une fonction itérative est simplement connexe.

12. Pour terminer ce chapitre, nous donnons un exemple qui montre que F est constitué par une infinité de courbes analytiques non fermées. Il nous paraît qu'aucun exemple de ce genre n'ait été donné jusqu'à présent.

$$z_1 = -25 \cdot \frac{z(16z - 25)}{215z - (21)^2}$$

L'équation $z - \varphi(z) = 0$ a trois racines réelles ∞ , 0 , $\frac{21^2 + 25^2}{215 + 25 \cdot 16}$. ∞ est un point attractif, tandis que 0 est un point répulsif, car on a $\varphi'(\infty) = -\frac{80}{43}$ et $\varphi'(0) = -\left(\frac{25}{21}\right)^2$. Les deux points critiques c_1 et c'_1 sont donnés par l'équation :

$$(215z_1 - 25^2)^2 + 4 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 21^2 \cdot z_1 = 0,$$

qui admet les deux racines -1 , $-\frac{25^4}{215^2}$. On a

donc $c_1 = -1$, et $\varphi(c_1) = \varphi(-1) = \frac{25}{16}$. Comme $\varphi\left(\frac{25}{16}\right) = 0$, on a $\varphi_2(c_1) = 0$. C_1 est donc un antécédent de rang 2 de 0 . En dehors de 0 et ∞ , il n'existe plus de points limites des conséquents de points critiques. Par conséquent, en dehors de la région du point ∞ , il n'existe aucune autre région où la suite $\varphi_n(z)$ est normale. Cela étant, faisons la transformation

$$z = \frac{21^2 + 25^2 + z'}{215 + 25 \cdot 16}.$$

Nous passons de la fraction

$$z_1 = -25 \frac{z[16z - 25]}{215z - 21^2}$$

à la fraction (1).

$$(1) \quad z_1 = -z \frac{az + b}{cz - d}$$

en posant $a = 25 \cdot 16$, $b = 21^2 \cdot 215 + 21^2 \cdot 25 \cdot 32 + 16 \cdot 25^3$, $c = 215$, $d = -25^2 \cdot 215 + 21^2 \cdot 25 \cdot 16$.

a , b , c , d sont positifs. On voit que pour $-\frac{b}{a} < z < 0$, on a $z_1 < 0$. D'autre part, on a

$$(2) \quad z_1 + \frac{b}{a} = -\frac{a^2 z^2 + b(a - c)z + bd}{a(cz - d)}$$

En revenant aux valeurs numériques de a, b, c, d on trouve $b^2(a-c)^2 - 4a^2bd < 0$. Donc $a^2z^2 + b(a-c)z + bd$ est toujours positive et on a pour $z < 0, z_1 + \frac{b}{a} > 0$. Ainsi donc, pour $-\frac{b}{a} < z < 0$, on a $-\frac{b}{a} < z_1 < 0$. Le conséquent d'un point du segment droit $-\frac{b}{a}, 0$ est aussi un point du segment droit $-\frac{b}{a}, 0$. $-\frac{b}{a}, 0$ ne contient donc aucun point intérieur du domaine R_∞ et par suite appartient entièrement à F . Or, puisque a, b, c, d vérifient l'inégalité $b^2(a-c)^2 - 4a^2bd < 0$, la formule (2) montre que le point $-\frac{b}{a}$ ne peut avoir deux antécédents réels de rang 1. Si on revient à la fraction primitive, on conclut de là que le second antécédent de rang 1, P , du point double $\frac{21^2 + 25^2}{215 + 25.16}$ est situé entre les deux points critiques $-1, -\frac{25^4}{215^2}$ et que le segment droit $\overline{O, P}$ appartient à F . Le segment entre les points -1 et P appartient donc à F , et ses deux antécédents de rang 1 sont deux arcs de la circonférence qui coupe orthogonalement l'axe réel en c et c' . En prenant les antécédents successifs du segment $\overline{P, -1}$, on obtient une infinité d'arcs de courbes analytiques qui se raccordent l'un à l'autre en des points antécédents de c_1 . L'ensemble de ces courbes analytiques non fermées et leurs limites constituent F .

Le résultat précédent peut s'obtenir immédiatement sans calcul. En effet, un des points critiques de $\varphi_{-1}(z)$

étant antécédent de rang 2 d'un point répulsif 0, la région R_∞ de ∞ ne contient qu'un point critique de $\varphi_{-1}(z)$ et par suite ne sera pas multiplement connexe. F ne se réduira pas à un ensemble partout discontinu.

D'après les numéros précédents, R_∞ ne contient qu'un segment réel, dont les extrémités sont deux points α et α_{-1} tels que α est un point double de $[z|\varphi(z)]$ et α_{-1} son second antécédent. Par conséquent, le segment droit fini entre α_{-1} et α ne contient aucun point intérieur de R_∞ et par suite appartient à F comme il n'existe aucune autre région où la suite $\varphi_n(z)$ est normale. D'autre part, on connaît que les deux points — 1, $\frac{21^2 + 25^2}{215 + 25.16}$ situés des deux côtés de 0 sont deux points de F ; donc, le point double 0 ne peut être une des extrémités du segment réel de R_∞ . Celles-ci seront donc formées par le point double $\frac{21^2 + 25^2}{215 + 25.16}$ et son second antécédent de rang 1, P. Le point critique — 1 est par suite contenu dans le segment droit fini entre P et $\frac{21^2 + 25^2}{215 + 25.16}$.

BIBLIOGRAPHIE

FATOU. — Sur les équations fonctionnelles, 1^{er} mémoire. (*Bulletins de la Société Mathématique de France* 1919, p. 161-271); Sur les équations fonctionnelles, 2^e et 3^e mémoires. (*Bull. Soc. Math.* 1920, p. 33-94 et p. 208-314); Notes sur les fonctions invariantes par une substitution rationnelle. (*Bull. Soc. Math.* 1922); Sur les frontières de certains domaines. (*Bull. Soc. Math.* 1923).

HADAMARD. — Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles. (*Bull. Soc. Math.* 1901).

JULIA. — Sur l'itération des fractions rationnelles. (*Journal de Mathématiques de Liouville* 1918); Sur quelques problèmes relatifs à l'itération. (*Comptes rendus t. 168*, 1919); Sur quelques applications de la représentation conforme à la résolution d'équations fonctionnelles. (*Bull. Soc. Math.* 1924).

KOENIGS. — Recherches sur les substitutions uniformes. (*Bulletins de Sciences Mathématiques* 1883); Recherches sur les équations fonctionnelles. (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure* 1884); Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles. (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure* 1885).

LATTÈS. — Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation. (*Annali di Matematica* 1906); Nouvelles recherches sur les courbes invariantes par une transformation. (*Annales de l'Ecole Normale supérieure* 1908).

MONTÉL. — Leçons sur la famille normale de fonctions analytiques.

PICARD. — Leçons sur quelques équations fonctionnelles.

TAMB LYCHE. — Une formule d'itération. (*Bull. Soc. Math.* 1927).

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
PRÉFACE.....	7 et 8
CHAPITRE PREMIER.	
Introduction et Etude générale.....	9 à 27
CHAPITRE II.	
Sur les points limites de l'ensemble des points critiques des $\varphi_{-n}(z)$	29 à 39
CHAPITRE III.	
Quelques propriétés des fractions du second degré et à coefficients réels.....	41 à 51
BIBLIOGRAPHIE.	

SECONDE THÈSE

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ

FAMILLES NORMALES et QUASI NORMALES de FONCTIONS MÉROMORPHES

LU ET ACCEPTÉ :

Les Membres du Jury :

J. SIRE

EYRAUD

VU ET APPROUVÉ :

*Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Lyon :*

V. GRIGNARD

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Lyon, le 24 mai 1930.

Le Recteur,

Président du Conseil de l'Université,

J. GHEUSI.

— IMPRIMERIE —
BOSC FRÈRES, M. & L. RIOU
42, quai Gailleton — LYON
